

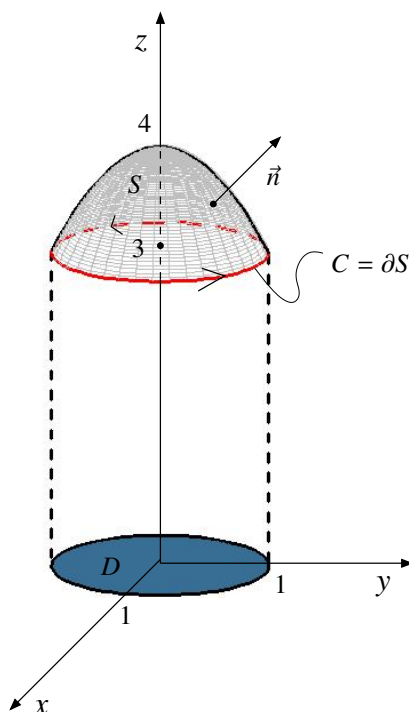
Cálculo 3A – EP15 – Teorema de Stokes – Gabarito

Exercício 1: Verifique o teorema de Stokes, calculando a integral de linha e a integral de superfície para o campo $\vec{F}$ e a superfície S .

- a) $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 3\vec{k}$, S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x, 3y)$, e S a porção do plano $x - z = 0$, contida no cilindro $x^2 + y^2 = 4$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

Solução:

a) De $z = 4 - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$, temos $z = 3$. Logo, a interseção do parabolóide com o cilindro ocorre no plano $z = 3$. Assim, o esboço de S está representado na figura que se segue.



Devemos verificar que:

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Cálculo de $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Pelas considerações acima, vemos que C é a interseção do parabolóide com o plano $z = 3$, isto é,

$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$. Como $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ então a última componente de $\vec{n}$ é maior que zero, donde $\vec{n}$ aponta

para cima. Logo, pela “regra da mão direita” vemos que C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Assim, uma parametrização de C é dada por $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = 3$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo, $dx = -\sin t \, dt$, $dy = \cos t \, dt$ e $dz = 0$. Então:

$$\begin{aligned}\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C=\partial S} 2y dx - z dy + 3 dz = \int_0^{2\pi} [2 \sin t (-\sin t) - 3(\cos t) + 3 \cdot 0] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 t - 3 \cos t) dt = \left[-2 \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) - 3 \sin t \right]_0^{2\pi} = -2\pi.\end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

Temos $S : z = 4 - x^2 - y^2$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$. Como $\vec{n}$ aponta para cima, temos que $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. Temos também que $dS = |\vec{N}| dx dy$. Além disso:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -z & 3 \end{vmatrix} = (1, 0, -2).$$

Portanto:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (1, 0, -2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \iint_D (2x - 2) dx dy = \iint_D 2x dx dy - 2 \iint_D dx dy.$$

Como a função $f(x, y) = 2x$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y então:

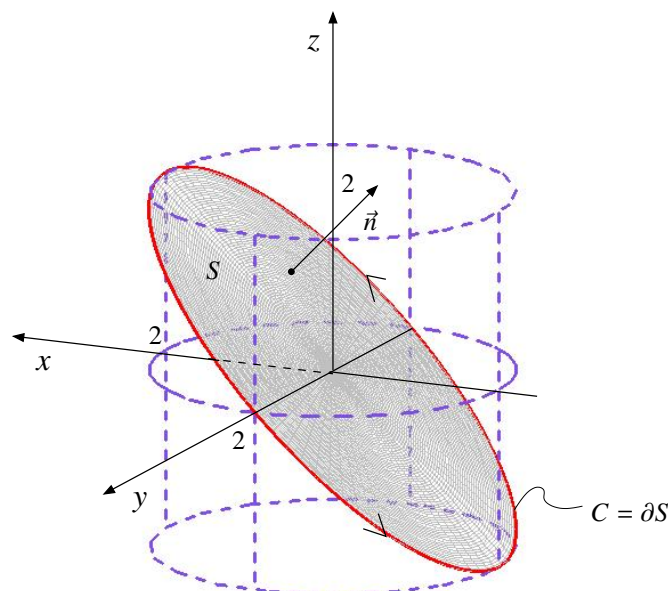
$$\iint_D 2x dx dy = 0.$$

Logo:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -2A(D) = -2(\pi \cdot 1^2) = -2\pi.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado para este caso.

b) O esboço de S está representado na figura que se segue.



Devemos verificar que

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Cálculo de $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Temos que $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Como $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ então a última componente de $\vec{n}$ é positiva, donde $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Portanto, a projeção de C sobre o plano xy está orientada no sentido anti-horário. Assim, uma parametrização de C é dada por $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ e $z = 2 \cos t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo, $dx = -2 \sin t dt$, $dy = 2 \cos t dt$ e $dz = -2 \sin t dt$. Então:

$$\begin{aligned} \oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C 2z dx + x dy + 3y dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [2(2 \cos t)(-2 \sin t) + (2 \cos t)(2 \cos t) + 3(2 \sin t)(-2 \sin t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \sin t \cos t + 4 \cos^2 t - 12 \sin^2 t) dt = \\ &= \left[8 \cdot \frac{\cos^2 t}{2} + \frac{4}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) - \frac{12}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 0 + 2 \cdot 2\pi - 6 \cdot 2\pi = -8\pi. \end{aligned}$$

Cálculo de $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

Temos $S : z = x$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Como $\vec{n}$ aponta para cima, temos que $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (-1, 0, 1)$. Temos também que $dS = |\vec{N}| dx dy$. Além disso, temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & 3y \end{vmatrix} = (3, 2, 1).$$

Portanto:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (3, 2, 1) \cdot (-1, 0, 1) dx dy = \iint_D (-3 + 1) dx dy = -2A(D) = -2(\pi \cdot 2^2) = -8\pi.$$

Assim, o teorema de Stokes está verificado.

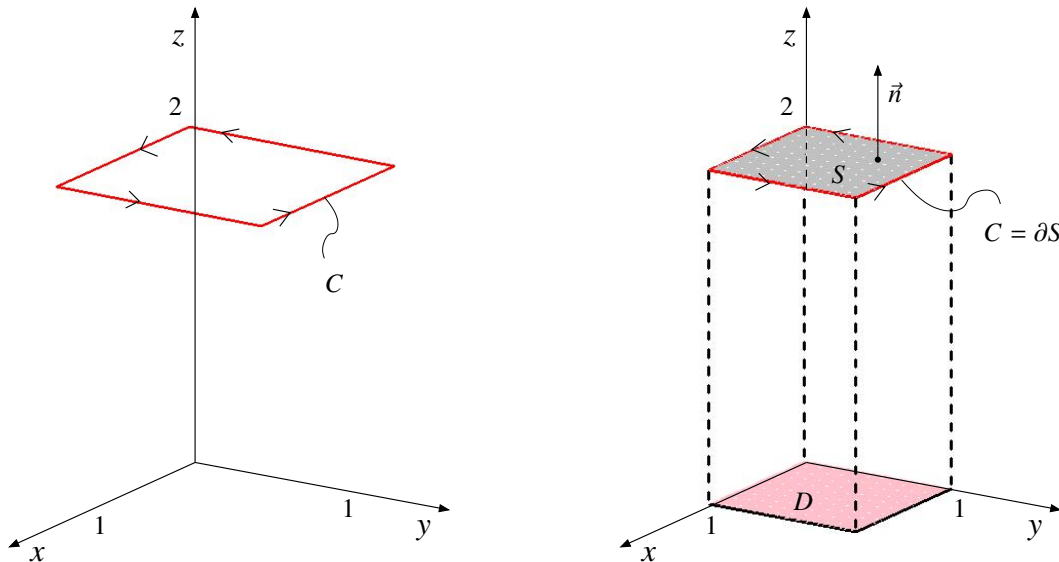
Exercício 2: Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde:

- $\vec{F}(x, y, z) = yz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e C é o quadrado de vértices $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$ e $(0, 1, 2)$, orientado no sentido anti-horário quando visto de cima;
- $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, percorrido nesta ordem;
- $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ e C é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;
- $\vec{F}(x, y, z) = (z + y^2, e^{y^2} + 1, \ln(z^2 + 1) + y)$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 4 - 2 \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

a) Observemos que o quadrado C está contido no plano $z = 2$. Portanto, consideremos a superfície S , porção do plano $z = 2$, limitada por C . Logo, temos que $S : z = 2$, com $(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

O esboço de C está representado na figura a seguir.



Como ∂S está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima então, usando a “regra da mão direita”, vemos que $\vec{n} = \vec{k}$. Temos que:

$$dS = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \, dxdy = \sqrt{1 + 0 + 0} \, dxdy = dxdy.$$

Além disso:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy & xz \end{vmatrix} = (0, y - z, y - z) = (0, y - 2, y - 2)$$

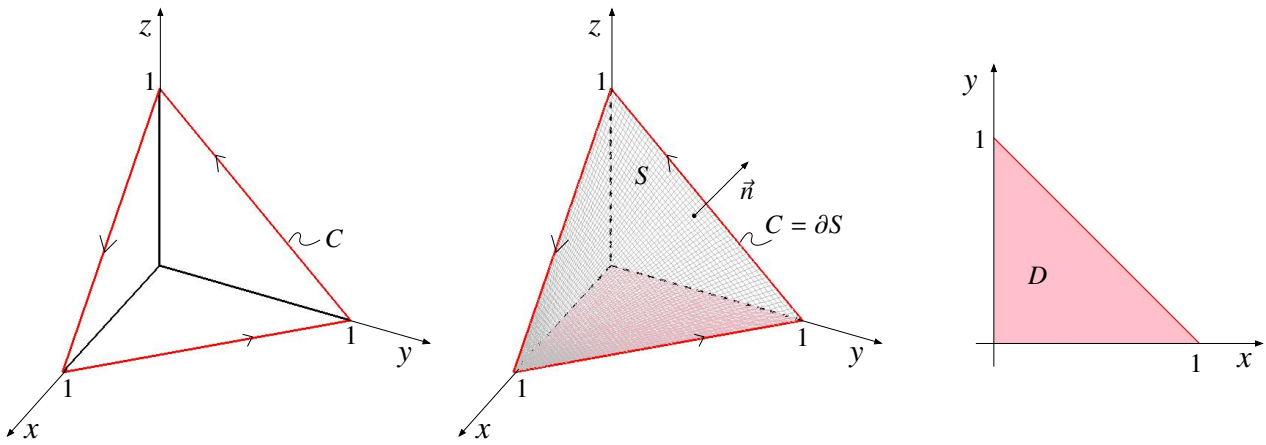
em S . Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientada positivamente, então pelo teorema de Stokes, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (0, y - 2, y - 2) \cdot (0, 0, 1) \, dxdy = \\ &= \iint_D (y - 2) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (y - 2) \, dxdy = \int_0^1 (y - 2) \, dy = \left[\frac{y^2}{2} - 2y \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) O esboço de C está representado na figura da página seguinte.

A equação do plano do triângulo é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ onde $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, isto é, $x + y + z = 1$.

Então considere a superfície S , porção deste plano, limitada por C . Temos então que $S : z = 1 - x - y$, com $(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.



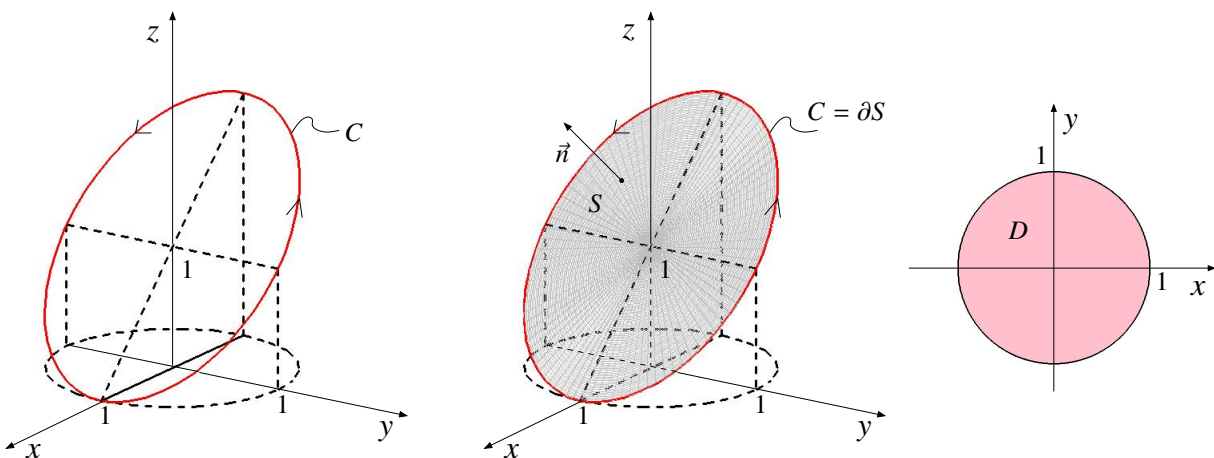
Como C está orientada no sentido anti-horário, então pela “regra da mão direita” vemos que $\vec{n}$ aponta para cima. Logo, $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 1, 1)$. Temos também que $dS = |\vec{N}| dx dy = \sqrt{3} dx dy$. Além disso, temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientada positivamente, então pelo teorema de Stokes temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (-1, -1, -1) \cdot (1, 1, 1) dx dy = \\ &= \iint_D (-1 - 1 - 1) dx dy = -3A(D) = -3\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

c) O esboço de C está representado na figura que se segue.



Consideremos a superfície S , porção deste plano $x + z = 1$ que se projeta sobre o plano xy , segundo o disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Então temos que $S : z = 1 - x$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Como C está orientada no sentido anti-horário, então pela “regra da mão direita” vemos que $\vec{n}$ aponta

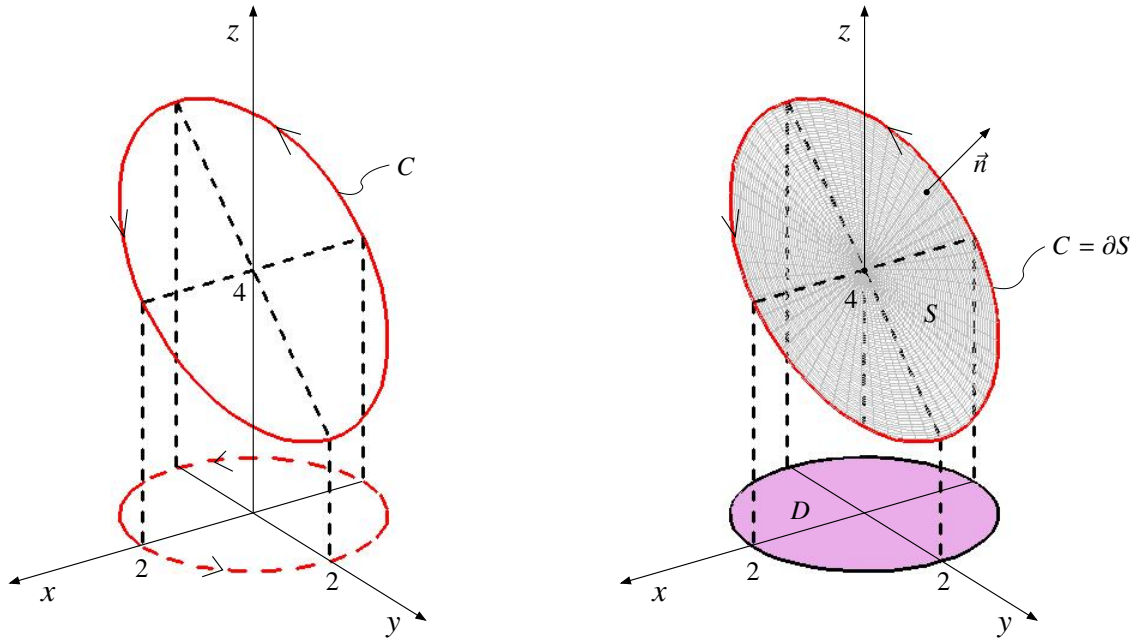
para cima. Logo, $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ e $dS = |\vec{N}| dx dy$ onde $\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (1, 0, 1)$ donde $\vec{n} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = |\vec{N}| dx dy = \sqrt{2} dx dy$. Por outro lado:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-1-1, -1-1, -1-1) = (-2, -2, -2).$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ (bordo de S) está orientada positivamente, então pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (-2, -2, -2) \cdot (1, 0, 1) dx dy = -4A(D) = -4(\pi \cdot 1^2) = -4\pi.$$

d) Como $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (2, 0, 4)$ então C é uma curva fechada tendo equações paramétricas $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ e $z = 4 - 2 \sin t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ donde $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 4 - y$. Logo C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = 4 - y$ e cujo esboço é:



Da parametrização de C vemos que C está orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. Consideremos a superfície S porção do plano $z = 4 - y$, limitada por C . Então temos que $S : z = 4 - y$, com $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 4$. Como C está orientada no sentido anti-horário então pela “regra da mão direita” vemos que $\vec{n}$ aponta para cima. Então $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ onde

$\vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (0, 1, 1)$. Logo $\vec{n} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}}$ e $dS = \sqrt{2} dx dy$. Temos também:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+y^2 & e^{y^2}+1 & \ln(z^2+1)+y \end{vmatrix} = (1, 1, -2y).$$

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $C = \partial S$ está orientado positivamente, então pelo teorema de Stokes temos:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (1, 1, -2y) \cdot (0, 1, 1) dxdy = \\ &= \iint_D (1 - 2y) dxdy = \iint_D dxdy + \iint_D (-2y) dxdy.\end{aligned}$$

Como

$$\iint_D dxdy = A(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

e

$$\iint_D (-2y) dxdy = 0,$$

pois a função $f(x, y) = -2y$ é ímpar na variável y e D tem simetria em relação ao eixo x . Então:

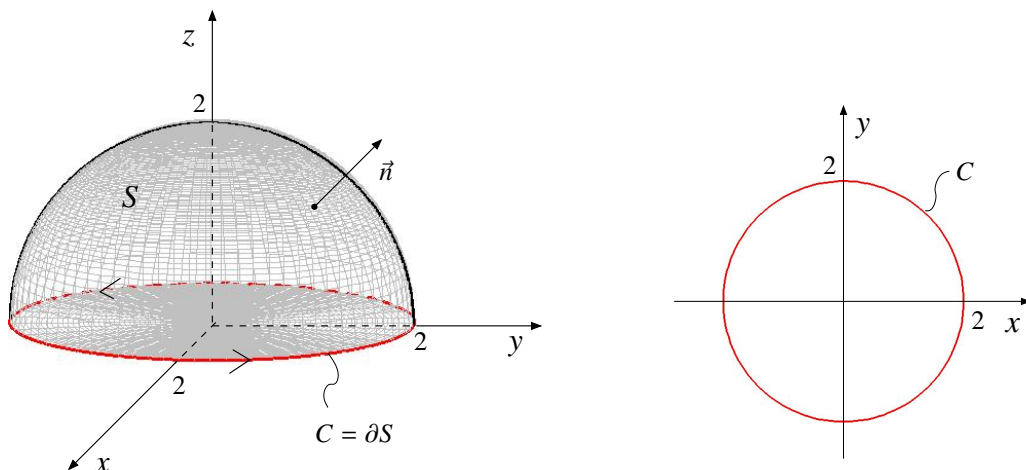
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi.$$

Exercício 3: Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

- a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 e^{yz} \vec{i} + y^2 e^{x^2} \vec{j} + z^2 e^{xy} \vec{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq 0$ e com orientação para cima;
- b) $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x, z^3)$ e S qualquer superfície cujo bordo seja a curva $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 1)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, com a normal apontando para cima.

Solução:

- a) O esboço de C está representado na figura que se segue.



De acordo com a orientação de S , vemos que $C = \partial S$ tem orientação no sentido anti-horário quando vista de cima. Como $\vec{F}$ é de classe C^1 e $C = \partial S$ está orientado positivamente então pelo teorema de Stokes temos que

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 e^{yz} dx + y^2 e^{x^2} dy + z^2 e^{xy} dz$$

onde C é dada por $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$ donde $dz = 0$. Logo

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_C \underbrace{x^2 e^0}_P dx + \underbrace{y^2 e^{x^2}}_Q dy \stackrel{*}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (2xy^2 e^{x^2} - 0) dx dy = \iint_D 2xy^2 e^{x^2} dx dy = 0\end{aligned}$$

pois a função $f(x, y) = 2xy^2 e^{x^2}$ é ímpar na variável x e D tem simetria em relação ao eixo y .

Nota: em * usamos o teorema de Green.

b) Temos que $C = \partial S : \gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 1)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Como a orientação de C , que é anti-horária quando vista de cima, está de acordo com a normal $\vec{n}$ e como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então pelo teorema de Stokes temos:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(2 \cos t, 3 \sin t, 1) \cdot (-2 \sin t, 3 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t (3 \sin t)^2, 2 \cos t, 1) \cdot (-2 \sin t, 3 \cos t, 0) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-36 \cos t \sin^3 t + 6 \cos^2 t) dt = \left[-36 \cdot \frac{\sin^4 t}{4} + \frac{6}{2}(t + \sin 2t) \right]_0^{2\pi} = \\ &= 0 + 3 \cdot 2\pi = 6\pi.\end{aligned}$$

Exercício 4: Seja $\vec{F}(x, y, z) = (8x^3 + z^2, -3z, 2xz - 3y)$.

a) $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$? Porquê?

b) Se C é o segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(2, 1, 3)$, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

a) Temos que

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 8x^3 + z^2 & -3z & 2xz - 3y \end{vmatrix} = (-3 + 3, 2z - 2z, 0) = \vec{0}.$$

Como $\vec{F}$ é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ com $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ e $\mathbb{R}^3$ é um conjunto simplesmente conexo então, pelo teorema das equivalências, segue que $\vec{F}$ é conservativo.

b) Como $\vec{F}$ é conservativo, então existe uma função $\varphi(x, y, z)$ diferenciável em $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$ em $\mathbb{R}^3$, ou seja:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 8x^3 + z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xz - 3y \quad (3)$$

Integrando (1), (2) e (3) em relação a x , y e z , respectivamente, temos:

$$\varphi(x, y, z) = 2x^4 + xz^2 + f(y, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = -3yz + g(x, z)$$

$$\varphi(x, y, z) = xz^2 - 3yz + h(x, y)$$

Para obtermos a mesma expressão para $\varphi(x, y, z)$ devemos tomar $f(y, z) = -3yz$, $g(x, z) = 2x^4 + xz^2$ e $h(x, y) = 2x^4$. Assim, temos que

$$\varphi(x, y, z) = 2x^4 + xz^2 - 3yz$$

é uma função potencial de $\vec{F}$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo para integral de linha, temos que

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(2, 1, 3) - \varphi(0, 0, 0) = (2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3) - 0 = 32 + 18 - 9 = 41.$$

Exercício 5: A integral

$$\int_C 2xe^{2y} dx + 2(x^2 e^{2y} + y \cos z) dy - y^2 \sin z dz$$

é independente do caminho? Calcule o valor da integral para a curva C obtida como interseção da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 5$ com o plano $x = 1$, orientada no sentido de crescimento de y .

Solução: O campo

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (2xe^{2y}, 2(x^2 e^{2y} + y \cos z), -y^2 \sin z)$$

é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo. Como

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^{2y} & 2(x^2 e^{2y} + y \cos z) & -y^2 \sin z \end{vmatrix} = (-2y \sin z + 2y \sin z, 0, 4xe^{2y} - 4xe^{2y}) = \vec{0}.$$

Então, pelo teorema das equivalências, a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de C .

De $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 5$ e $x = 1$ temos $5 = 9 - 1 - y^2$ donde $y^2 = 3$ e $y \pm \sqrt{3}$. Considerando que C está orientada no sentido de crescimento de y , concluímos que o ponto inicial de C é o ponto $A = (1, -\sqrt{3}, 5)$ e o ponto final de C é $B = (1, \sqrt{3}, 5)$. Como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende de C , então vamos substituir C por C_1 , segmento de reta que liga A a B . Então temos $C_1 : x = 1$, $z = 5$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ donde $dx = 0$ e $dz = 0$. Então:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} P(1, y, 5) dx + Q(1, y, 5) dy + R(1, y, 5) dz \stackrel{*}{=} \\&\stackrel{*}{=} \int_{C_1} Q(1, y, 5) dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2(1^2 e^{2y} + y \cos 5) dy = \\&= 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (e^{2y} + y \cos 5) dy = 2 \left[\frac{e^{2y}}{2} + \frac{y^2}{2} \cos 5 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\&= \left(e^{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \cos 5 \right) - \left(e^{-2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \cos 5 \right) = e^{2\sqrt{3}} - e^{-2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Nota: em * temos que $dx = 0$ e $dz = 0$.